TEMI D'ESAME dal 2009 al

ALGEBRA LINEARE - PLACIDO LONGO

INDICE

16 giugno 2009 pag 1
2 luglio 2009 pag 5
23 luglio 2009 pag 8
17 settembre 2009 pag 11
13 gennaio 2010 pag 14
29 gennaio 2010 pag 17
18 febbraio 2010 pag 20
10 giugno 2010 pag 22
1 luglio 2010 pag 25
22 luglio 2010 pag 28
16 settembre 2010 pag 31
12 gennaio 2012 pag 34
2 febbraio 2012 pag 37
16 febbraio 2012 pag 40
8 giugno 2012 pag 43
28 giugno 2012 pag 46
13 luglio 2012 pag 50
14 settembre 2012 pag 53
11 settembre 2013 pag 56
31 gennaio 2013 pag 59
11 giugno 2013 pag 62
1 luglio 2013 pag 66
22 luglio 2013 pag 69

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

www.mastercopy.it COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

④

16 GIUGNO 2009

① Controlliamo se sono già completi:

$(1,2,1)$, $(1,0,1)$, $(1,4,1)$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

a riga 0 di possiamo omettere

a sott I

a sottraggo dalla II il doppio della I

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

↑

ci sono solo 2 pivot: la dimensione è 2.

In realtà possiamo capirlo dal fatto che abbiamo semplificato un'intera riga, quindi non si possono avere 3 pivot.

②

Per completare la base aggiungiamo una base conosciuta (per semplicità usiamo la canonica)

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \text{I} \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{II} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \text{III} \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \to \text{III} - \text{I} \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & \to \text{III} - 2\,\text{I} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

↑ ↑ ↑

$\Rightarrow$ base completa di $\mathbb{R}^3$

possiamo scegliere a caso un pivot e restano due non pivot, è quindi sufficiente aggiungere un vettore della canonica (esiAppo) risp C

②

$T(x)$ su $\mathbb{R}^3$ $\quad T(x) = Ax$ $\quad$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ci si accorge subito che A non è suriettiva, ma non iniettiva

ci si accorge subito che DIM A ci informa che non è iniettiva

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \textcircled{2} \end{array}$$

↓

non pivot : $\dim \ker > 0$ non iniettiva

rango = pivot = 2

$\Vert$

$\dim \operatorname{imm}$ $\quad$ iniettiva = rango = n° colonne, qui $2 \neq 3$

suriettiva se codominio = immagine

rango = n° righe $\quad 2 \neq$ del numero di righe

$\Downarrow$

non iniettiva

risp D

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

③ Il sottospazio di vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $(1,2,1)$ è:

È sufficiente scrivere l'equazione $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}$ per accorgersi che la risposta giusta è la B: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; x+2y+z=0\}$

④ Scriviamo il versore di $(2,2,0,2,2)$

$$\hat{v} = v \cdot \frac{1}{|v|} = \frac{v}{|v|} = \frac{(2,2,0,2,2)}{\sqrt{(2,2,0,2,2)(2,2,0,2,2)}}$$

il prodotto scalare è il modo più semplice di fare un quadrato di vettore

$$\frac{(2,2,0,2,2)}{\sqrt{4+4+0+4+4}} = \frac{(2,2,0,2,2)}{4} = \begin{pmatrix} 2/4 \\ 2/4 \\ 0 \\ 2/4 \\ 2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$ risp B

⑤ Distanza tra u e v dove $u=1$ e $v=t$

$$\text{dist} = |u-v| = \sqrt{\int_0^1 (1-t)(1-t)\,dt} = \sqrt{\int_0^1 1+t^2-2t\,dt} =$$

$$\sqrt{t + \frac{t^3}{3} - \frac{2}{2}t^2}\Big|_0^1 = \sqrt{1+\frac{1}{3}-1} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

⑥ Segmento di estremi $(0,1,1,1)$ e $(1,1,1,0)$ (x_0 e x_1)

eq segm: $x = x_0 + t(\underbrace{x_1 - x_0}_{u})$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0+t=0 \\ 1+0=0 \\ 1+0=0 \\ 1+t=0 \end{cases} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$$ risposta B

$t \in [0,1]$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

oppure

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

(7) Area del parallelogramma con lati $(1,1,1,0)$ e $(1,1,1,2)$:

$$\sqrt{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2}=\sqrt{3\cdot 4-3^2}=$$

$$\sqrt{12-9}=\sqrt{3}$$

(8) Una matrice M tale che $M^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}M$ sia diagonale è:

Cerco di trovare un'equazione generale:
- Inversa → Laplace 1) complementi algebrici 2) trasposta 3) $\cdot\frac{1}{\det(A)}$

matrice generica:

$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ → inversa (sviluppo rispetto righe) (segno − termini di pos dispari) $=\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{21}\\-a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}$

$(-1)^2 a_{22}\quad (-1)^3 a_{21}\quad (-1)^3 a_{12}\quad (-1)^4 a_{11}$

trasposta (scambio elem diag secondaria) $\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}\leftarrow M^{-1}$ generica

Moltiplico per $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ e poi per la mat di partenza $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-a_{12}&a_{22}\\a_{11}&-a_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-a_{12}\cdot a_{11}+a_{22}\cdot a_{21})&(-a_{12}^2+a_{22}^2)\\(a_{11}^2-a_{21}^2)&(a_{12}\cdot a_{11}+a_{21}a_{22})\end{pmatrix}$$

Per essere diagonale gli elementi a_{ij} $i\neq j$ devono essere $=0$

$$\begin{cases}a_{11}^2-a_{21}^2=0\\-a_{12}^2+a_{22}^2=0\end{cases}$$

A questo punto posso sostituire le matrici particolari e trovare quello che verifica la condizione

(A) $\begin{cases}1-1=0\\-1+1=0\end{cases}$ → verificata

(B) $\begin{cases}+1-0\neq 0\end{cases}$ (C) $\begin{cases}1-0\neq 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0-0=0\\\neq 0\end{cases}$

RISP A

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

(9) Proietto $(1,1,1)$ su $(1,2,1)$ =

$$\frac{u\cdot v}{v\cdot v}\cdot v = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\2/3\end{pmatrix}$$ risp A

(10) Le rette parametriche $p(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\sigma(t) = s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sono:

Proviamo a eguagliarle:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow -t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

t	s	
0	0	-1
-1	0	0
0	1	0

→ $0t + 0s = -1$ sistema impossibile => sghembe

=> le rette non hanno punti in comune => sghembe
risp E

(11) determinante

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\\1 & 1 & 0 & 1\\2 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Uso lo sviluppo di Laplace sulla II riga =

$$1\cdot(-1)^{\overset{\text{riga}}{2}+\overset{\text{colonna}}{3}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\2 & 2 & 1\end{vmatrix} + 2(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\2 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

(1 = coef)

Ora uso Sarrus sulle 3x3;

$$-\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\\2 & 2 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1 & 1\\2 & 2 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= -[(1+0+2) - (0+2+2)] + 2[0-(0)] = \underline{1}$$ risp A

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

(12) Procedimento di Gram-Schmidt ai vettori in $\mathbb{C}^3$ $(0,0,i)$, $(0,1,i)$, $(1+i,1,i)$

$v_1 = (0,0,i)$ $\quad v_2 = u_2 - u_{2<v_1>}$

$$u_{2<v_1>} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$ RISP B

$v_3 = u_3 - u_{3<v_1,v_2>}$ => span non ortogonale

$$\begin{cases}\left[\begin{pmatrix}1+i\\1\\i\end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} - \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \text{III riga} = (i - \alpha i)i = 0 \rightarrow -1 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1\\ \left[\begin{pmatrix}1+i\\1\\i\end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} - \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \text{II riga} = (1-\beta)1 = 0 \rightarrow \beta = 1\end{cases}$$

$$\text{sost} \rightarrow \left[\begin{pmatrix}1+i\\1\\i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1+i\\0\\0\end{pmatrix}, \text{poiché} = \begin{pmatrix}1+i\\1\\i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1+i\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1+i\\1\\i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+i\\0\\0\end{pmatrix}$$